

© International Baccalaureate Organization 2026

All rights reserved. No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without the prior written permission from the IB. Additionally, the license tied with this product prohibits use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, whether fee-covered or not, is prohibited and is a criminal offense.

More information on how to request written permission in the form of a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organisation du Baccalauréat International 2026

Tous droits réservés. Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite préalable de l'IB. De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, moyennant paiement ou non, est interdite et constitue une infraction pénale.

Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour obtenir une autorisation écrite sous la forme d'une licence, rendez-vous à l'adresse <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organización del Bachillerato Internacional, 2026

Todos los derechos reservados. No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin la previa autorización por escrito del IB. Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales—, ya sea incluido en tasas o no, está prohibido y constituye un delito.

En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una autorización por escrito en forma de licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

# Matemáticas: Análisis y Enfoques

## Nivel Superior

### Prueba 3

20 de mayo de 2026

**Zona A** tarde | **Zona B** tarde | **Zona C** tarde

1 hora 15 minutos

---

#### Instrucciones para el alumnado

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Análisis y Enfoques NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[55 puntos]**.

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

**1.** [Puntuación máxima: 26]

**En esta pregunta le pedimos que explore un juego de azar.**

Este juego de azar consiste en intentar ganar caramelos de una cesta pasando una serie de rondas. Las reglas del juego son las siguientes:

- El jugador empieza el juego con, al menos, un caramelo.
- Al inicio de cada ronda, el jugador hace girar una ruleta.
- Si en la ruleta sale “gana”, el jugador gana un caramelo de la cesta; en caso contrario, tiene que devolver un caramelo a la cesta.
- El juego continúa hasta que el jugador haya ganado todos los caramelos o hasta que al jugador ya no le quede ningún caramelo.

Considere inicialmente el caso en el que, en total, hay tres caramelos en el juego.

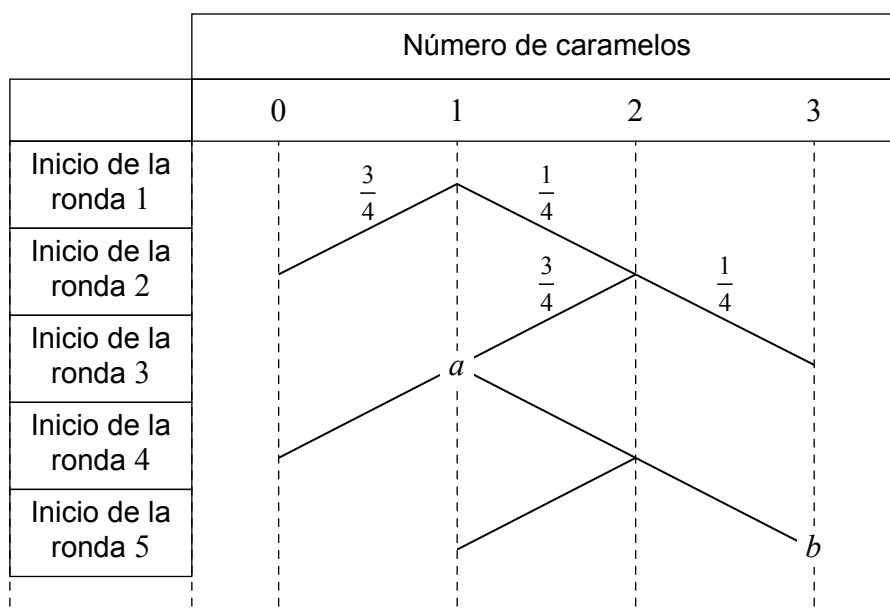
Fiona empieza el juego teniendo un caramelo; en la cesta hay dos caramelos que puede ganar.

La probabilidad de obtener un “gana” en una ronda cualquiera es  $\frac{1}{4}$  y es independiente de lo obtenido en cualquier otro giro de la ruleta.

**(Esta pregunta continúa en la página siguiente)**

**(Pregunta 1: continuación)**

En la siguiente figura se muestra el número de caramelos que Fiona puede tener al inicio de cada ronda y los posibles resultados de las rondas iniciales.



Si Fiona gana la ronda 1, tendrá exactamente dos caramelos al inicio de la ronda 2.

Si pierde la ronda 1, no le quedará ningún caramelo al inicio de la ronda 2 y el juego terminará ahí.

La probabilidad de que Fiona tenga exactamente un caramelo al inicio de la ronda 3 es  $a$  y la probabilidad de que tenga tres caramelos al inicio de la ronda 5 es  $b$ .

(a) (i) Muestre que  $a = \frac{3}{16}$ . [1]

(ii) Halle el valor de  $b$ . [2]

Al inicio de la ronda 5, Fiona tiene exactamente un caramelo.

(b) Escriba la probabilidad de que siga teniendo un caramelo al cabo de dos rondas más. [2]

**(Esta pregunta continúa en la página siguiente)**

**(Pregunta 1: continuación)**

Considere ahora el caso en el que, en total, hay  $w$  caramelos en el juego.

Sea  $R_n$  la probabilidad de que Fiona acabe teniendo los  $w$  caramelos, cuando inicia una ronda teniendo  $n$  caramelos.

Si Fiona acaba una ronda sin ningún caramelo,  $n = 0$ , la probabilidad de que acabe teniendo todos los caramelos ( $R_0$ ) es cero y el juego termina ahí.

Para  $n > 0$ , si Fiona gana la siguiente ronda, tendrá  $n + 1$  caramelos y la probabilidad de que acabe teniendo los  $w$  caramelos es ahora  $R_{n+1}$ .

De modo similar, si Fiona pierde la siguiente ronda, tendrá  $n - 1$  caramelos y la probabilidad de que acabe teniendo los  $w$  caramelos es ahora  $R_{n-1}$ .

La probabilidad de que en la ruleta salga “gana” es ahora  $p$ , donde  $0 < p < 1$ , y la probabilidad de que salga “no gana” es  $q$ , donde  $q = 1 - p$  y  $p \neq q$ .

Al inicio de cada ronda,  $R_n$  viene dada por

$$R_n = qR_{n-1} + pR_{n+1}, \text{ donde } n > 0.$$

Considere el caso en el que  $w = 4$  y  $p = \frac{1}{4}$ .

(c) Escriba una expresión que dé  $R_2$  en función de  $R_1$  y  $R_3$ . [1]

(d) Se sabe que cuando Fiona inicia una ronda con exactamente un caramelo, la probabilidad de que gane el juego es  $R_1 = 0,025$ . Cuando Fiona inicia una ronda con exactamente tres caramelos, la probabilidad de que gane el juego es  $R_3 = 0,325$ .

Halle el valor de  $R_2$ . [2]

**(Esta pregunta continúa en la página siguiente)**

**(Pregunta 1: continuación)**

Para los siguientes apartados de esta pregunta, considere el caso en el que, en total, hay  $w$  caramelos en el juego y la probabilidad de que en la ruleta salga “gana” es  $p$ .

(e) Expresando  $R_n$  como  $(p + q)R_n$ , muestre que  $R_{n+1} - R_n = \frac{q}{p}(R_n - R_{n-1})$ . [2]

(f) (i) A partir de lo anterior, halle una expresión para  $R_2 - R_1$  en función de  $p$ ,  $q$  y  $R_1$ . [1]

(ii) Muestre que  $R_3 - R_2 = \left(\frac{q}{p}\right)^2 R_1$ . [2]

(iii) Deduzca una expresión para  $R_n - R_{n-1}$  en función de  $n$ ,  $p$ ,  $q$  y  $R_1$ . [1]

(g) (i) Considerando  $(R_2 - R_1) + (R_3 - R_2) + (R_4 - R_3) + \dots + (R_n - R_{n-1})$ , o de cualquier otro modo alternativo, muestre que

$$R_n = R_1 \left( 1 + \frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \dots + \left(\frac{q}{p}\right)^{n-1} \right). \quad [4]$$

(ii) A partir de lo anterior, y sabiendo que  $R_1 = \frac{1 - \frac{q}{p}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^w}$ ,

muestre que  $R_n = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^n}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^w}$ . [4]

Ahora hay un gran número de caramelos en el juego.

Fiona inicia el juego con  $m$  caramelos, donde  $p = 0,495$ .

Una vez que haya obtenido 10 caramelos adicionales, ya tendrá todos los caramelos y el juego terminará ahí.

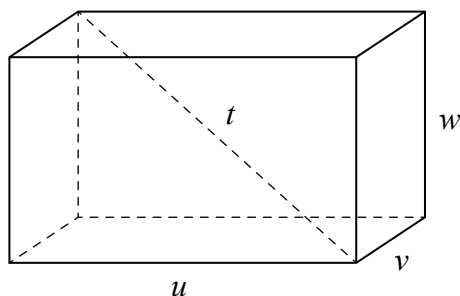
(h) Determine el valor mínimo de  $m$  con el que Fiona tiene, al menos, un 80 % de probabilidades de ganar 10 caramelos adicionales. [4]

2. [Puntuación máximas: 29]

**En esta pregunta le pedimos que explore la relación que existe entre los números complejos y un ortoedro (cuboide) cuyas dimensiones y diagonal interior son todas longitudes enteras. Un ortoedro así se denomina “caja pitagórica”.**

Una caja pitagórica, que abreviaremos como  $CP(u, v, w, t)$ , es un ortoedro de dimensiones  $u \times v \times w$  y una diagonal interior de longitud  $t$ , donde  $u, v, w, t \in \mathbb{Z}^+$ . Toda esta información se representa en la siguiente figura.

la figura no está dibujada a escala



- (a) Para el caso en el que  $u = 9$ ,  $v = 2$  y  $w = 6$ , halle el valor de  $t$ . [2]

Los números complejos  $z_1$  y  $z_2$  se utilizan para generar una caja pitagórica,  $CP(u, v, w, t)$ , si:

$$u = 2 \operatorname{Re}(z_1 z_2^*), \quad v = 2 \operatorname{Im}(z_1 z_2^*), \quad w = |z_1|^2 - |z_2|^2 \quad \text{y} \quad t = |z_1|^2 + |z_2|^2, \quad \text{donde } u, v, w, t \in \mathbb{Z}^+.$$

Por el contrario, para cualquier caja pitagórica  $CP(u, v, w, t)$ , existen dos números complejos  $z_1$  y  $z_2$  que satisfacen las anteriores definiciones de  $u, v, w$  y  $t$ .

Considere dos números complejos  $z_1 = a + bi$  y  $z_2 = c + di$ , donde  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+$ .

- (b) (i) Halle una expresión para  $z_1 z_2^*$  en función de  $a, b, c$  y  $d$ . [2]
- (ii) A partir de lo anterior, halle una expresión para  $v$  en función de  $a, b, c$  y  $d$ . [1]
- (c) Considere el caso en el que  $z_1 = 3 + 7i$  y  $z_2 = c + 6i$  se utilizan para generar una caja pitagórica.
- (i) Muestre que  $v = 14c - 36$ . [1]
- (ii) Muestre que los únicos valores posibles de  $c$  son 3 y 4. [4]
- (iii) Para  $c = 4$ , halle los valores de  $u, v, w$  y  $t$ . [5]

**(Esta pregunta continúa en la página siguiente)**

**(Pregunta 2: continuación)**

Existen tres cajas pitagóricas que tienen una diagonal interior de longitud 23 .

- (d) Sabiendo que  $23 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2$ , determine las dimensiones de **una** de estas cajas pitagóricas.

[6]

Las dimensiones y la diagonal interior de la caja pitagórica,  $CP(u, v, w, t)$ , se pueden utilizar para generar un número complejo  $z$  tal que  $z = \frac{u + vi}{t - w}$ .

Considere la caja pitagórica  $CP(26, 38, 43, 63)$ .

- (e) Muestre que para esta caja pitagórica  $z = \frac{13 + 19i}{10}$ .

[1]

Este número complejo  $z$  se puede escribir también como  $\frac{z_1}{z_2}$ , donde  $z_1$  y  $z_2$  generan la caja pitagórica  $CP(26, 38, 43, 63)$ .

Se sabe que  $\frac{z_1}{z_2}$  se puede expresar como  $\frac{z_1 z_2^*}{|z_2|^2}$ .

- (f) (i) Considerando  $t - w$ , muestre que  $c^2 + d^2 = 10$ .

[2]

- (ii) A partir de lo anterior, y sabiendo que  $c > d$ , halle  $z_1$  y  $z_2$ .

[5]

**Advertencia:**

Los contenidos usados en las evaluaciones del IB a menudo provienen de fuentes externas auténticas. Las opiniones expresadas en ellos pertenecen a sus autores y/o editores, y no reflejan necesariamente las del IB. En ocasiones, se incluyen empresas, productos o personas ficticios. Cualquier parecido con entidades reales es pura coincidencia. Todas las marcas o marcas registradas (™ o ®) incluidas se utilizan únicamente con fines ilustrativos, y su uso no implica ninguna afiliación con el IB ni aprobación por parte del IB.